Fysikernes hemmelige våben

Jensen, Jens Højgaard; Hecksher, Tina

Published in:
Aktuel Naturvidenskab

Publication date:
2018

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

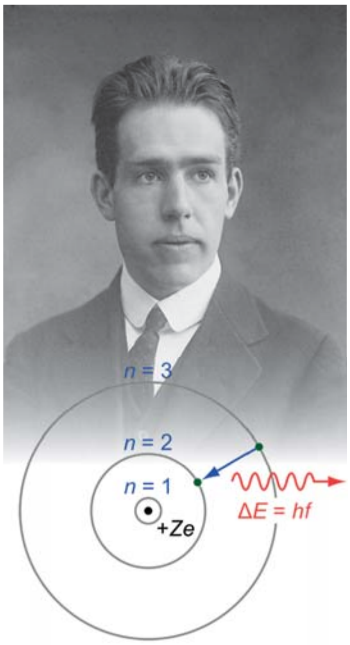
Citation for published version (APA):
Jensen, J. H., & Hecksher, T. (2018). Fysikernes hemmelige våben. *Aktuel Naturvidenskab*, *2018*(4), 26-29.
https://aktuelnaturvidenskab.dk/find-artikel/nyeste-numre/4-2018/

FYSIKERNES HEMMELIGE VÅBEN

Fysikernes form for bogstavregning gør det muligt at udlede nye formler ved dimensionsanalyse. Dette hemmelige våben kan andre fagområder også have glæde af, da det kan give en dybere forståelse af sammenhænge, der ellers blot er erfaringsbaserede.

Det er indlysende, at ligningen 18 får = 18 mursten er noget vrøvl, selvom der står 18 på begge sider af lighedstegnet. På samme måde er 18 sek = 18 m noget vrøvl. I gymnasiet skal man derfor i fysiktimerne lave enhedskontrol af sine udregninger. Hvis en udregning ikke ender med samme *slags* enheder på begge sider af lighedstegnet, er der begået en fejl, som man bør finde og rette. Den ene side af lighedstegnet må for eksempel ikke have enheden m/sek, medens den anden side af ligningen har enheden m/sek^2. Det afgørende ved enhedskontrol er, at enhederne på hver sin side af lighedstegnet repræsenterer samme slags fysiske størrelse, for eksempel den fysiske størrelse hastighed. Eller sagt på en anden måde: De to sider af ligningen skal have samme dimension, for eksempel dimensionen hastighed (som er en længde divideret med en tid). Når fysikere laver dimensionsanalyse udnytter de konsekvenser af dette krav – ikke blot til enhedskontrol, men også til teoretisk at udlede nye formler ud fra kendte formler og nye antagelser.

Da Niels Bohr i 1913 udviklede den model for brintatomet, som skulle



blive startskuddet til kvantemekanikken og forståelsen af elektronernes opførsel i atomerne, lod han sig således lede af dimensionsanalyse. Og der er mange spørgsmål indenfor fysikken, man kan tænke sig til svaret på ved hjælp af dimensionsanalyse – uden at udføre et eneste eksperiment. For eksempel, hvor lang tid det tager et timeglas på Månen at tømmes.

Det er imidlertid ikke kun fysikere, der har glæde af dimensionsanalyse. Også specialiserede ingeniører, for eksempel dem, der laver hydrodynamiske og aerodynamiske modelforsøg, bruger dimensionsanalyse som et vigtigt værktøj. Men slagkraften af dimensionsanalyse er skjult for mange, der kunne have udbytte af tankegangen - også uden for fysik og specialiserede ingeniørfag. Artiklen her er ment som en introduktion til dimensionsanalyse og tænkningen bag.

Symboler i fysik og matematik

I matematik og fysik udtrykker vi os ved hjælp af symboler. Talsymboler, eksempelvis 18, når vi regner med tal (aritmetik). Bogstaver som pladsholdere for tal, når vi regner med bogstaver i matematik (algebra). I fysik regner vi, som i matematik, også med bogstaver. Her er bogstaverne imidlertid pladsholdere for fysiske størrelser, ikke for tal. Kort fortalt er dimensionsanalyse relevant, når vi regner med formler, hvor bogstaverne i formlerne repræsenterer fysiske størrelser, ikke tal som i matematikken.

For at tydeliggøre tænkningen bag dimensionsanalyse vil vi groft skitsere de tre abstraktionsspring ved brugen af symboler i matematik og fysik gennem menneskehedens historie:

Om forfatterne

Jens Højgaard Jensen er lektor i fysik på Roskilde Universitet. Forfatter af klumme om fysikopgaver i Kvant (Tidsskrift for Fysik og Astronomi)
jhj@ruc.dk

Tina Hecksher er lektor i fysik på Roskilde Universitet. Hun er tilknyttet forskningsprojektet Matter, der er støttet af Villum Fonden.
tihe@ruc.dk

Pythagoras' sætning

Et af de enkleste eksempler på dimensionsanalyse er det nedenstående bevis for Pythagoras' sætning. Udover at være enkelt, er eksemplet også dialogåbnende i forhold til umiddelbart dimensionsanalyse-skeptiske matematikere. I online-versionen af artiklen findes flere, mere komplicerede, men også mere repræsentative eksempler.

De fleste kender formlen $c^2 = a^2+b^2$, som udtrykker forholdet mellem sidelængderne i en retvinklet trekant. Det er en meget berømt geometrisk sætning, som der findes hundredvis af mere eller mindre komplicerede beviser for (se fx. www.cut-the-knot.org/pythagoras/ som indeholder en samling på 120 af slagsen). Her vil vi skitsere et dimensionsargument for sætningen.

En retvinklet trekant er entydigt bestemt ud fra længden af hypotenusen, *c*, og den mindste vinkel, *θ*. Arealet A af trekanten er således også en entydigt bestemt funktion af disse to størrelser.

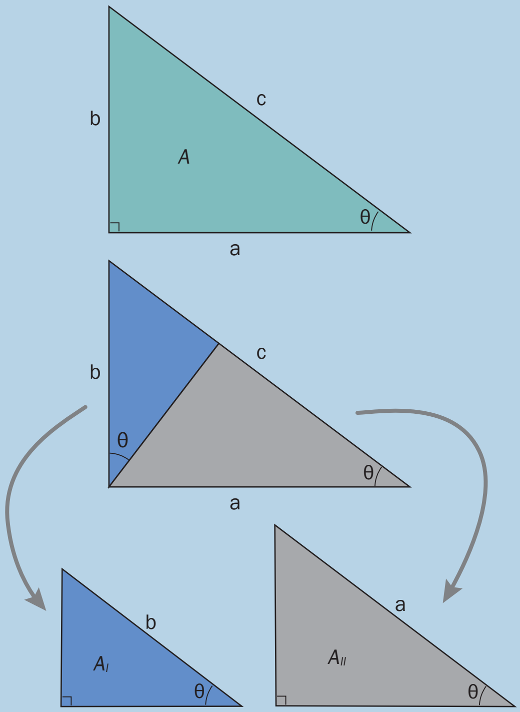
På figuren er den retvinklede trekant opdelt i to retvinklede trekanter med henholdsvis arealerne A_I og A_{II}. Det ses af figuren, at de to trekanter har samme form som den store trekant, begge med vinklen *θ* som deres mindste vinkel, men med hypotenuserne *b* og *a*.

Arealet af den oprindelige trekant opfylder:

$$A = A_I + A_{II}$$

Nu vil vi bruge dimensionsanalyse til at gå et skridt videre i beviset.

Da vinklen *θ* er dimensionsløs (den har ikke en fysisk enhed), og arealet af trekanten skal have dimensionen areal (længde gange længde), må *A* af dimensionsgrunde være tvunget til at have formen $c^2 \cdot f(\theta)$, hvor *f* er en entydig funktion alene af *θ*. Vi vil ikke på andre måder



kunne få dimensionen areal ud af størrelserne *c* og *θ*. Tilsvarende gælder $A_{II} = a^2 \cdot f(\theta)$ og $A_I = b^2 \cdot f(\theta)$.

Læg mærke til, at vi ikke behøver kende det eksakte udtryk for *f(θ)*. Vi har kun brug for, at *f(θ)* er entydigt bestemt. (I dette tilfælde kan vi dog beregne $f(\theta) = 1/2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)$.)

Sætter vi udtrykkene ind i $A = A_I + A_{II}$ får vi:

$$c^2 \cdot f(\theta) = a^2 \cdot f(\theta) + b^2 \cdot f(\theta)$$

Ved division med *f(θ)* på begge sider af lighedstegnet fås

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

altså Pythagoras' sætning.

Ved at tælle har man i forhistorisk tid kunnet nå frem til, at mine otte får plus dine fem får tilsammen udgør en flok på tretten får. Ligeledes har man kunnet finde ud af, at hvis vi bunker mine otte mursten med dine fem mursten, så har vi tretten mursten i bunken. Abstraktionsspringet består da i, at otte plus fem er tretten, uanset om det drejer sig om får, mursten eller alt muligt andet. Med vor tids skrivemåde gælder udsagnet: 8 + 5 = 13, generelt for tal. At der er tale om en abstraktion ses af, at det er noget, der kræver undervisning i de små klassetrin i skolen. Når man i dag snakker om at tælle på fingrene har det altså ikke så meget med fingre at gøre, som det har med en abstrakt tænkemåde at gøre.

Det andet abstraktionsspring består i at erstatte tal med bogstaver. Abstraktionsgraden øges selvfølgelig, når vi lader bogstaver være pladsholdere for tal. Lad os som illustration se på udtrykket (a+b)(a-b). Ved at benytte regnereglerne for tal for a og b kan parenteserne ganges ud til $a^2 - ab + ba - b^2$. Da ab = ba fås derfor $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ som en alment gældende formel. Da vi har udført de samme operationer med a og b, som vi kunne gøre med for eksempel tallene 17 og 3½, eller alle mulige andre par af tal, ses den enorme økonomiske gevinst ved abstraktionsspringet fra at regne med tal (aritmetik) til at regne med bogstaver (algebra): Ved at regne med bogstaver kan vi på en gang finde formler som gælder for alle talsituationer. Fantastisk!

Det tredje abstraktionsspring er, når bogstaverne i formelregning forstås, ikke som pladsholdere for tal, men som pladsholdere for fysiske størrelser. Hvis vi siger, at Lise og Anna vejer lige meget, eller at Jan vejer dobbelt så meget som de to hver for sig, er det udsagn om fysiske størrelser, ikke om tal. Vi behøver ikke tal for at bekræfte udsagnene. Det første udsagn kan bekræftes ved at Lise og Anna sætter sig i hver sin ende af en vippe. Det andet ved at Lise og Anna sammen sidder i den ene ende af vippen og Jan i

Dimensionsanalyse – sådan gør man!

Arbejdet med denne artikel har været vanskeligt: Hvordan skrive en artikel om udledning af formler uden illustrerende brug af formler? I det væsentlige har vi undgået formlerne, da erfaringen er, at mange, også blandt læserne af dette blad, går uden om formler. Til læsere, som har fået lyst til at vide mere om, hvordan man faktisk gør, har vi udarbejdet fem eksempler på dimensionsanalyse, som du kan finde på AktuelNaturvidenskab.dk og i en udvidet onlineversion af artiklen.

I dette ekstramateriale har vi udfoldet de to eksempler nævnt i artiklen om at finde svingningstiden og omløbstiden for henholdsvis et pendul og en satellit, og hvorfor permeabiliteten nødvendigvis må afhænge af kvadratet på størrelsen af partiklerne, når vand strømmer gennem materialer (Darcys lov).

Desuden har vi et eksempel fra biologiens verden om, hvor hurtigt fugle basker med vingerne i stillestående luft samt to yderligere fysikeksempler om størrelsen på et atom, og hvor hurtigt sand løber gennem et timeglas på månen.

den anden. Ligningerne $m_L = m_A$ og $m_L+m_A = m_J$ for masserne af Lise, Anna og Jan giver mening, uden at vi skal en omvej omkring enheder og tal. I fysikken har det gennem de seneste par hundrede år gradvist stået klarere, at bogstavregningen i teoretisk fysik repræsenterer regning med fysiske størrelser fremfor med tal. Massen af Lise er ikke et tal. Den kan udtrykkes ved et tal gange en enhed, for eksempel 50 kg. Men den kan også beskrives som 50.000 g. Eller som 110,23 lb. Uanset hvilke enheder med dertil hørende tal, vi benytter, er det størrelsen massen af Lise, der er tale om. Og i teoretisk fysik behøver vi ikke vælge enheder for at foretage beregninger. Det er først, når vi sammenligner med målinger, at vi har behov for enheder og dertil hørende tal.

Størrelser og dimensioner i fysik

I geometri kan vi sige, at for eksempel hypotenusen i en retvinklet trekant har dimensionen længde. Man skriver [c] = L, som skal læses som "dimensionen af c er længde". Med længde som enkeltstående basisstørrelsesart gælder så $[c^2] = L^2$, idet c^2 er af den af basisstørrelsesarten længde afledte størrelsesart areal. Da størrelsesarten vinkel er afledt som forholdet imellem to længder, kan vi for en vinkel, φ, skrive [φ] = 1, hvor 1-tallet markerer, at størrelsesarten vinkel regnes dimensionsløs. Alt sammen meget formelt og umiddelbart værdiløst, hvis ikke det kunne fungere som en overgang til, hvordan der arbejdes med basisstørrelsesarter, afledte størrelsesarter og dertil svarende dimensioner i fysik.

Det internationalt vedtagne SI-system, som lærebøgerne i fysik nu om dage skrives i overensstemmelse med, er opbygget af to omgange. Først er det fastlagt, hvilke basisstørrelsesarter systemet skal bygges på. Nemlig størrelsesarterne længde, masse, tid, elektrisk strømstyrke, temperatur, lysstyrke og stofmængde. Derefter er der besluttet enheder for basisstørrelsesarterne, nemlig meter, kilogram, sekund, ampere, kelvin, candela og mol. Herudfra kan der defineres afledte størrelsesarter med hertil hørende dimensioner og afledte enheder. For eksempel er størrelsesarten hastighed afledt af basisstørrelsesarterne længde og tid med dimensionen L/T og enheden m/sek, idet dimensionen af størrelsesarten tid kaldes T. Kort fortalt har SI-systemet haft en dobbelt betydning for fysik. I forhold til eksperimentalfysik leverer det måleenheder. I forhold til teoretisk fysik styrer det, i kraft af valget af basisstørrelsesarter, måden formler skrives på, og måden størrelsesregning i fysik foregår på.

Teoretisk forskning ved hjælp af dimensionsanalyse

Når bogstavregning i fysik forstås som regning med fysiske størrelser med forskellige dimensioner, er det ikke så svært at forstå, hvad dimensionsanalyse bygger på. Det giver kun mening at addere, subtrahere eller sætte fysiske størrelser lig med hinanden, hvis de har samme dimension. Derimod giver det mening at gange og dividere fysiske størrelser med hinanden til nye slags størrelser. For eksempel kan hastigheden 1 m/sek opnås ved at dividere 18 meter med 18 sekunder. Ved bogstavregning med fysiske størrelser ganger og dividerer vi med bogstaverne som pladsholdere for pakker af tal gange enheder. Men vi kan kun addere og subtrahere bogstaver, der repræsenterer størrelser med samme dimension. Og vi kan kun sætte bogstavudtryk lig hinanden, hvis størrelserne på hver side af lighedstegnet har samme dimension. Det er kernen i dimensionsanalyse.

Ved anvendelse af Newtons mekanik kan svingningstiden for penduler udregnes til at være givet ved formlen $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$, hvor τ er pendulets svingningstid, og l og g er henholdsvis pendulets længde og tyngdefeltstyrken på Jorden. Ved en anden slags anvendelse af Newtons mekanik kan omløbstiden for satellitter nær Jordens overflade udregnes til at være givet ved formlen $\tau = 2\pi\sqrt{R/g}$, hvor τ nu er omløbstiden for satellitter, og R og g henholdsvis er Jordens radius og tyngdefeltstyrken på Jorden.

De to formler, kan også udledes ved dimensionsanalyse – bortset fra faktoren 2π i formlerne. Ifølge formlerne afhænger hverken pendulsvingningstider eller satellit-omløbstider af henholdsvis pendulernes eller satellitternes masser. Det er umiddelbart til at forstå ud fra dimensionsanalyse. Vi kan nemlig ikke få dimensionerne til at passe, hvis vi i en formel for τ lader en masse indgå på højre side af formlen. Dimensionsanalysen forklarer også, hvorfor formlerne er ens bortset fra ombytningen af pendullængden og Jordens radius, selvom måderne de traditionelt udledes på afviger fra hinanden.

Et værktøj ikke kun for fysikere

Også uden for fysik kan man teoretisk tænke sig til formler ved hjælp af dimensionsanalyse. I hydrogeologi bruger man udtrykket permeabilitet til at beskrive vands bevægelse igennem materialer i undergrunden (for eksempel sand eller grus). Ifølge lærebogslitteraturen i hydrogeologi er det en måleerfaring, at permeabiliteten er proportional med kvadratet på størrelsen af partiklerne i materialet. Dimensionsanalyse viser imidlertid, at det, med de gjorte antagelser i hydrogeologi, ikke kan være anderledes. Når måleresultatet viser, at permeabiliteten afhænger af kvadratet på størrelsen af partiklerne, er det derfor ikke så interessant, som hvis det viste en afvigelse herfra. For så ville det nemlig rette søgelyset imod primære antagelser i hydrogeologien. Man kan også teoretisk tænke sig til resultater i biologi ved hjælp af dimensionsanalyse. Hvor hurtigt basker en stillestående lærke med vingerne, sammenlignet med hvor hurtigt en stillestående høg basker med sine vinger?

Dimensionsanalyse er altså ikke forbeholdt fysik – alle fag, der tænker i fysiske størrelser, kan have glæde af det. Permeabiliteten i hydrogeologi og vingebaskefrekvensen for stillestående fugle er lige såvel fysiske størrelser (med reference til SI-systemet), som de fysiske størrelser, vi udregner formler for i fysik.

Men opfattelsen af formler er afgørende for at udføre dimensionsanalyse både i fysik og andre fag.

Den mest udbredte opfattelse af formler er, at de er en form for stenografisk fremstilling af måleresultater. Og opfattet således, giver det ikke mening at nå frem til formlerne ved hjælp af dimensionsanalyse. Vi må da nøjes med enhedskontrol.

Dimensionsanalyse hænger sammen med en teoretisk tilgang til udledningen af formler: Givet de og de formler i forvejen sammenholdt med de og de antagelser til lejligheden, hvad fører det til? Det er i en sådan situation, at dimensionsanalysen kan være teoretisk vejledende.

At dimensionsanalysen er et hemmeligt våben for fysikere frem for udøvere af andre fag, hænger nærliggende sammen med tyngden af formaliseret teori i fysik. Ikke desto mindre er dimensionsanalysen overset som tænkemåde, ikke alene i andre fag, men også blandt mange fysikere . ■

Videre læsning:
Jan de Boer, Symboler og betegnelser i matematikken og fysikken, Fysisk Tidskrift 86 (1988) 49

Einstein gjorde noget tilsvarende vores bevis her for Pythagoras sætning som 11-årig, se S. Strogatz, Einsteins first proof, The New Yorker (19 november 2015).

For yderligere inspiration fra vores hånd se J.H. Jensen, Atlanterhavsbølger, KVANT December 2015, 29, J. H. Jensen, Bohrs atommodel, KVANT Maj 2016, 33 og T. Heckssher, Insights through dimensions, Nature Physics, 13 (2017), 1026.

En mere omfattende introduktion på dansk til dimensionsanalyse kan findes ved at google IMFUFA tekster og gå til tekst nr. 269, en studenterprojektrapport fra RUC skrevet af Tine Guldager Christiansen, Ken Andersen, Nikolaj Hermann og Jannik Rasmussen i 1994.

Ekstramateriale til artikel i Aktuel Naturvidenskab nr. 4 2018:
Fysikernes hemmelige våben

Fem eksempler på dimensionsanalyse

Forfattet af:
Jens Højgaard Jensen & Tina Hecksher

IMFUFA, Institut for Naturvidenskab og Miljø
Roskilde Universitet

Indhold

Eksempel 1: Pendul og satellit

Vi vil finde formler for svingningstiden for et pendul og omløbstiden for en lavt hængende satellit ved hjælp af dimensionsanalyse.

Lad os først finde en formel for svingningstiden for et pendul. Et simpelt pendul er en svingende sten bundet til en snor, der er fixeret i dens anden ende. Hvad afhænger svingningstiden af? Længden af pendulsnoren, l, må spille en rolle. Erfaringer med for eksempel pendul-ure er, at svingningstiden vokser med længden af deres pendulstænger. Tyngdefeltstyrken ("tyngdeaccelerationen"), g, på Jordens overflade må også være medbestemmende for svingningstiden. På Månen forventer vi for eksempel, at et givet pendul vil have en anden svingningstid end på Jorden. Måske afhænger svingningstiden også af pendulstenens masse, m?

Da indbyrdes additioner og subtraktioner af l, g og m ikke giver mening på grund af deres forskellige dimensioner, som er L, LT^{-2} og M, forsøger vi os med

$$\tau = \mathrm{tal} \times l^{\alpha} g^{\beta} m^{\gamma}\,, \tag{1}$$

som formel for svingningstiden τ, hvor α, β og γ i første omgang er ubekendte. I anden omgang må vi imidlertid kræve, at de to sider af ligning (1) har samme dimension. Og det ses de kun at have, hvis

$$T = L^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta} M^{\gamma} = L^{\alpha+\beta} T^{-2\beta} M^{\gamma}\,. \tag{2}$$

Da basisdimensionerne L, T og M per definition ikke kan reduceres til hinanden, skal potenserne i ligning (2) være de samme på hver side af ligningen for hver basisdimension for sig. Det betyder, at de tre ubekendte α, β og γ skal være løsning til de tre ligninger:

$$L: \qquad 0 = \alpha + \beta \tag{3}$$
$$T: \qquad 1 = -2\beta \tag{4}$$
$$M: \qquad 0 = \gamma\,, \tag{5}$$

idet vi på venstre side af ligning 2 i stedet for T kunne skrive $L^0T^1M^0$, og en dimension opløftet til potensen 0 regnes for det dimensionsløse tal 1.

Ligning (5), $\gamma = 0$, viser, at svingningstiden, ifølge ligning (1), ikke afhænger af m. Vi havde altså ikke behøvet medtage stenens masse som styrende parameter i starten af vores dimensionsanalyse. På den anden side er uafhængigheden af pendulmassen altså et resultat, der fremkommer tvingende af analysen.

Af ligning (4) fås $\beta = -1/2$, som indsat i ligning (3) giver $\alpha = 1/2$. Ved indsætning af disse værdier for α og β i ligning (1), når vi herefter frem til, at formlen for svingningstiden er:

$$\tau = \text{tal} \times (l/g)^{1/2} \tag{6}$$

En normal matematisk/fysisk udledning fører til en formel magen til. Det ekstra, der opnås ved ikke at skyde genvej ved hjælp af dimensionsanalyse, er, at tallet i ligning (6) kan findes til at være 2π.

(Faktisk afhænger svingningstiden af et pendul ved store udsving, udover af pendulsnorens længde og tyngdefeltstyrken, også af udsvingets størrelse. Så tallet i ligning (6) burde strengt taget rettes til at være en ukendt funktion af den maksimale udslagsvinkel. Vores dimensionsanalyse udledning af ligning (6) er kun rigtig for små penduludsving.)

Lad os dernæst finde omløbstiden for en lavtflyvende satellit. Hvad afhænger den af? Vi kan igen tænke på tyngdefeltstyrken ved Jordens overflade, g, og satellittens masse, m, i stedet for pendulstenens masse. Herudover må, modsvarende pendulsnorens længde, Jordens radius, R, være en bestemmende parameter for satellittens omløbstid. Nået så langt, viser det sig, at dimensionsanalysen til udledning af en formel for satellittens omløbstid er helt magen til udledningen af formlen for pendulets svingningstid. I begge tilfælde ønsker vi at finde en karakteristisk tid som funktion af en karakteristisk længde, massen af det, der bevæger sig, og tyngdefeltstyrken. Dimensionsanalyserne forløber derfor ens i de to tilfælde. Hvad angår satellittens omløbstid, er svaret derfor, at den ikke afhænger af satellittens masse, og er bestemt af ligning (6) med R indsat i stedet for l. Ved en normal matematisk/fysisk udledning findes tallet i formel (6) også i dette tilfælde at være 2π.

De normale matematisk/fysiske udledninger af formlerne for pendulers svingningstider og lavtflyvende satellitters omløbstider er ikke analoge. På sin vis viser udledningerne ved hjælp af dimensionsanalyse derfor en dybere sammenhæng mellem de to fænomener, end det umiddelbart fremgår af de sædvanlige udregninger.

Eksempel 2: Fuglevingebaskning

Hvor hurtigt basker en fugl, der holder sig stille i luften over et sted i landskabet i vindstille vejr? Vores erfaring siger os, at små fugle basker hurtigere med vingerne end store fugle. Men kan vi komme det lidt nærmere og sige noget mere kvantitativt om sammenhængen?

Lad os analysere situationen lidt. Hvis fuglen holder sig svævende og altså hverken taber eller øger sin højde, må fuglens vinger skubbe præcis nok luft nedad pr tid til at balancere tyngdekraften, F_g. Vi kan kalde effekten af fuglens basken med vingerne for en opdriftskraft, F_o, og for at fuglen kan holde sig stille i luften over det samme punkt i landskabet skal disse kræfter altså balancere, $F_g = F_o$.

Tyngdekraften kender vi, $F_g = mg$, hvor m er fuglens masse og g er tyngdefeltsstyrken. Men hvad kan opdriftskraften afhænge af? Den afhænger nok af vingebaskningsfrekvensen, f, altså hvor mange gange i sekundet vingerne bevæges op og ned. Derudover må opdriften også afhænge af luftens densitet, ρ: jo tyndere luft, jo mere skal der skubbes nedad for at balancere tyngdekraften. Desuden må størrelsen af vingerne også betyde noget for, hvor meget luft, der flyttes. Hvis vi antager, at fuglevinger er nogenlunde ensdannede, kan vi beskrive størrelsen af vingerne ved fx. deres længde, altså vingefanget, s. Hvis vi også antager at måden forskellige fugle basker med vingerne er ens, når vi frem til at opdriftskraften må være bestemt af f, ρ og s:

$$F_o = \text{tal} \times f^\alpha \rho^\beta s^\gamma \tag{1}$$

Dimensionen af frekvens er T^{-1}, dimensionen af densitet er masse pr volumen, altså ML^{-3}, og dimensionen af vingefanget er længde, L. Kravet om, at begge sider af ligning (1) har samme dimension (nemlig kraft, $[F] = MLT^{-1}$), betyder at eksponenterne α, β og γ skal matches med eksponenterne på venstresiden, altså

$$M\,L\,T^{-2} = (T^{-1})^\alpha \cdot (ML^{-3})^\beta \cdot (L)^\gamma = T^{-\alpha} M^\beta L^{-3\beta} L^\gamma = M^\beta\, L^{-3\beta+\gamma}\, T^{-\alpha}\,, \tag{2}$$

hvilket leder til en ligning for eksponenterne for hver dimension:

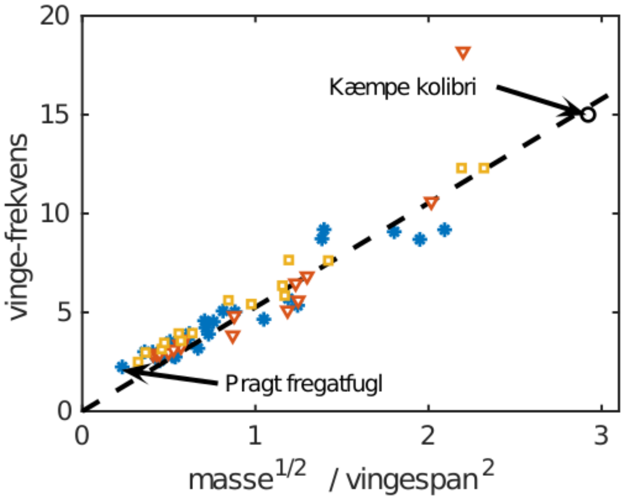
$$\begin{aligned} T: \quad -2 &= -\alpha && (3) \\ M: \quad 1 &= \beta && (4) \\ L: \quad 1 &= -3\beta + \gamma && (5) \end{aligned}$$

Vi har altså $\alpha = 2$ (ligning (3)) og $\beta = 1$ (ligning (4)), som indsat i den sidste ligning (5) giver $\gamma = 4$. Af dimensionsgrunde må der derfor for F_o nødvendigvis gælde

$$F_o = \text{tal} \times f^2 \rho s^4\,. \tag{6}$$

Da opdriftskraften F_o skal balancere tyngdekraften F_g har vi derfor

$$\text{tal} \times f^2 \rho s^4 = mg \tag{7}$$



Figur 0.1 Lineariseret plot af vingefrekvens data.

Her kan vi isolere f og dermed svare på vores oprindelige spørgsmål: hvor hurtigt basker fugle med vingerne? Dimensionsanalysesvaret er således $f^2 = \text{tal} \times \frac{mg}{\rho s^4}$ og dermed fås at

$$f = \text{tal} \times \left(\frac{mg}{\rho s^4}\right)^{1/2} = \text{tal} \times \left(\frac{g}{\rho}\right)^{1/2} \frac{m^{1/2}}{s^2}. \tag{8}$$

Da densiteten af luft ρ og tyngdefeltsstyrken g er den samme for forskellige fuglearter er forudsigelsen altså at vingefrekvensen er proportional med kvadratroden af massen over vingespan i anden, $f \propto m^{1/2}/s^2$. Forventningen er at en graf der viser vingefrekvensen f plottet som funktion af $\sqrt{m}/s^2$ giver en ret linie.

Men passer denne formel så? Faktisk findes der data i litteraturen på fugles vingefrekvens, deres masse og vingefang, som vi kan teste vores formel på[1]. Figur 0.1 viser tre datasæt (blå, orange og gul) som følger forudsigelsen af proportionalitet mellem vingefrekvens og $m^{1/2}/s^2$. Vores forudsigelse virker altså rimelig godt! Hældningen af plottet kan bruges til at bestemme den ukendte talfaktor som dimensionsanalysen ikke kan sige noget om.

Data er fra følgende referencer:

C. J. Pennycuick “Predicting wingbeat frequency and wavelength of birds”, J. Exp. Biol. **150**, p. 171-185 (1990)
C. J. Pennycuick “Wingbeat frequency of birds in steady cruising flight: new data and improved predictions”, J. Exp. Biol. **199**, p. 1613-1618 (1996)
C. J. Pennycuick “Speeds and wingbeat frequencies of migrating birds compared with calculated benchmarks”, J. Exp. Biol. **204**, p. 3283-3294 (2001)

[1] Det er dog fugle i flugt og ikke stillestående fugle, men hvis det antages, at deres vingefrekvens ikke er væsentlig forskellig i de to situationer, kan vi teste vores formel på disse data

Eksempel 3: Vandstrømning gennem sand

I hydrogeologi optræder den såkaldte Darcy's lov. Den udtrykker, at strømningshastigheden, v, af en væske gennem et porøst materiale, f.eks. sand, antages proportional med trykfaldet per længdeenhed, $-dP/dx$, hvor proportionalitetskonstanten, k, kaldes for permeabiliteten af den pågældende væske gennem det pågældende materiale. Altså, Darcy's lov:

$$v = -kdP/dx \tag{1}$$

Ifølge lærebogslitteraturen i hydrogeologi er det en måleerfaring, at permeabiliteten er proportional med kvadratet på kornstørrelsen af kornene, som materialet består af. Men det behøver vi imidlertid ikke måle os til. Det kan ikke være anderledes af dimensionsgrunde.

Hvad kan k afhænge af? Permeabiliteten må afhænge af, hvilken væske der er tale om. Det må være sværere at presse mere sejtflydende væsker gennem porerne i materialet end mindre sejtflydende. Vi antager derfor, at k afhænger af η, væskens viskositet, som er et mål for, hvor sejlflydende den er. Vi kunne måske også forestille os, at k afhænger af væskens massefylde, ρ. Herudover må permeabiliteten afhænge af størrelser, former og sammenpakninger i materialet, hvor en given fordeling af kornstørrelser, kornformer og deres sammenpakningsmønstre antages at kunne beskrives ved en middelkornstørrelse, d, og en dimensionsløs funktion, $F(f)$, af en række geometriske forhold f karakteristisk for den pågældende fordeling af størrelser, former og sammenpakninger.

Hvis vi antager, at der ikke er yderligere forhold, der påvirker permeabiliteten, må en formel for den søges blandt:

$$k = \eta^\alpha \, \rho^\beta \, d^\gamma \, F(f)\,, \tag{2}$$

hvor α, β og γ skal vælges således, at højre side af formlen får dimension magen til k og en eventuel ukendt talfaktor er indlemmet i $F(f)$.

Ifølge definitionen af k i ligning 1 ses dens dimension at være:

$$[k] = [v] \cdot [dx]/[dP] = (LT^{-1}) \cdot L/(ML^{-1}T^{-2}) = M^{-1}L^3T\,, \tag{3}$$

idet dimensionen af tryk (og trykændring, dP) er $ML^{-1}T^{-2}$, dimensionen af længde (og længdeændring, dx) er L, og dimensionen af hastighed, v, er LT^{-1}.

Da $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$, $[\rho] = ML^{-3}$ og $[d] = L$, skal α, β og γ, for at sikre samme dimension på begge sider af lighedstegnet i ligning (2), derfor opfylde ligningen:

$$M^{-1}L^3T = \Big(M\,L^{-1}\,T^{-1}\Big)^\alpha \cdot \Big(M\,L^{-3}\Big)^\beta \cdot L^\gamma) = M^{\alpha+\beta}\,L^{-\alpha-3\beta+\gamma}\,T^{-\alpha}\,. \tag{4}$$

Da basisdimensionerne M, L, og T per definition ikke kan udtrykkes ved hinanden, må potenserne svarende til hver basisdimension være den samme på begge sider af lighedstegnet.

$$
\begin{aligned}
M: \quad -1 &= \alpha + \beta && (5)\\
L: \quad 3 &= -\alpha - 3\beta + \gamma && (6)\\
T: \quad 1 &= -\alpha && (7)
\end{aligned}
$$

Ligning (7) giver $\alpha = -1$ direkte. Dette indsat i ligning (5) giver $\beta = 0$. Med disse to resultater kan det ses at ligning (6) kun opfyldes, hvis $\gamma = 2$.

Hvis Darcy's lov kan gøres gældende, er permeabilitetetskonstanten i den derfor af dimensionsgrunde tvingende givet ved et udtryk af formen:

$$k = \eta^{-1}\, d^2\, F(f) \tag{8}$$

Her er den dimensionsløse funktion $F(f)$ ukendt. Men sikkert er det, at k ikke kan afhænge af massefylden af den gennemstrømmende væske, og at den kun kan afhænge kvadratisk af d.

Eksempel 4: Hvor stort er et atom?

Hvis man spørger en fysiker vil svaret være 1 Å, dvs. 10^{-10} m – det er noget enhver fysiker ved. Men kan vi regne det ud? Og i særdeleshed: kan vi regne det ud ved hjælp af dimensionsanalyse? Det (måske) overraskende svar er ja. Og ikke nok med det – det var faktisk sådan selveste Niels Bohr blev inspireret til sin berømte atommodel i kvantemekanikkens tidlige dage.

Lidt historisk baggrund

I starten af forrige århundrede vidste man godt, at et atom består af ladede partikler. I 1911 viste Rutherford, at atomet mest består af tomt rum med en meget lille positivt ladet kerne og negative ladninger kredsende omkring, som planeterne omkring solen. I sin artikel fra 1913 argumenterer Niels Bohr – helt korrekt – for, at den klassiske fysik ikke kan forklare atomets stabilitet: Kredsende ladninger er konstant accelererede og burde derfor ifølge elektrodynamikken udsende elektromagnetisk stråling, tabe kinetisk energi og dermed spiralere ind mod kernen for til sidst at blive opslugt. Intet af dette stemmer med de observationer, man har for atomer. Atomer kan godt nok udsende stråling; dog ikke et kontinuert spektrum som forudsagt af elektrodynamikken, men i diskrete spektrale linjer. Og atomer kollapser ikke. Ved at antage, at energien på atomart niveau er kvantiseret og at elektronerne kun kan befinde sig i bestemte baner omkring kernen, udledte Niels Bohr sin berømte formel for spektrallinjerne af hydrogenatomet. Og han bemærkede, at ved at indføre Plancks konstant h kan man udlede den rigtige størrelse af atomet ved dimensionsanalyse.

Dimensionsanalyse

Hvis vi skal give et estimat af størrelsen af hydrogenatomet baseret på grundlæggende fysiske konstanter, skal vi først identificere de relevante konstanter for problemet. Da vi betragter et system bestående af en elektron, der kredser om den meget tungere proton, vil de oplagte størrelser at inddrage være elementarladningen e, elektronens masse m_e og vakuumpermitiviteten ε_0. Og så altså Plancks konstant, h. Dimensionen af disse størrelser er[1]:

elementarladningen:	$[e] = Q$
elektronens masse:	$[m_e] = M$
permitivitetskonstanten:	$[\varepsilon_0] = M^{-1}L^{-3}T^2Q^2$
Plancks konstant:	$[h] = ML^2T^{-1}$

Som et forsøg på at finde et udtryk for størrelsen af brintatomet, Bohr radius a_{Bohr}, ganger vi

[1] Her bruger vi grundstørrelsesarterne: masse M, længde L, tid T og ladning Q. SI-systemet opererer ikke med ladning men med strømstyrke som grundstørrelsesart. I dimensionsanalyse kan man selv vælge hvilke grundstørrelsesarter man vil arbejde med, så længe man er konsekvent.

potenser af e, m_e, ε_0 og h sammen. Kan man finde værdier for α, β, γ og δ således at formlen

$$a_{\text{Bohr}} = e^\alpha m_e^\beta \varepsilon_0^\gamma h^\delta \tag{1}$$

respekterer kravet om ens dimension på begge sider af lighedstegnet? Kravet fører til følgende ligning for dimensionerne

$$L = Q^\alpha M^\beta (M^{-1}L^{-3}T^2Q^2)^\gamma (ML^2T^{-1})^\delta = Q^{\alpha+2\gamma}\, M^{\beta-\gamma+\delta}\, T^{2\gamma-\delta}\, L^{-3\gamma+2\delta}\,, \tag{2}$$

og da grundstørrelsesarterne, M, L, T og Q, pr definition ikke kan udtrykkes ved hinanden skal, potenserne på begge sider af lighedstegnet for hver af grundstørrelsesarterne altså være den samme:

$$Q: \quad 0 = \alpha + 2\gamma \tag{3}$$
$$M: \quad 0 = \beta - \gamma + \delta \tag{4}$$
$$T: \quad 0 = 2\gamma - \delta \tag{5}$$
$$L: \quad 1 = -3\gamma + 2\delta \tag{6}$$

Vi får således fire ligninger med fire ubekendte. Ud fra ligning (5) og (6) findes $\gamma = 1$ og $\delta = 2$, som indsat i ligning (3) og (4) giver $\alpha = -2$ og $\beta = -1$. Vi kan altså godt finde værdier for α, β, γ og δ, der respekterer kravet om ens dimension på begge sider af lighedstegnet af ligning (1). Og ikke nok med det: dimensionsanalysen fører til, at enhver teori for brintatomet baseret på konstanterne e, m_e, ε_0 og h af dimensionsgrunde nødvendigvis må føre til resultatet

$$a_{\text{Bohr}} = \text{tal} \times \frac{h^2\varepsilon_0}{m_e e^2}\,. \tag{7}$$

Under antagelse af, at talfaktoren er af størrelsesorden 1[2] findes ved indsættelse af de numeriske værdier af de indgående konstanter

$$a_{\text{Bohr}} \approx \frac{(6.626\cdot 10^{-34}\ \text{Js})^2\, 8.854\cdot 10^{-12}\ \text{F/m}}{9.109\cdot 10^{-19}\ \text{kg}\,(1.602\cdot 10^{-19}\ \text{C})^2} = 1.66\cdot 10^{-10} m = 1.66\ \text{Å} \tag{8}$$

hvilket netop – som Niels Bohr argumenterede – cirka er størrelsen af brintatomet.

Referencer:

N. Bohr “On the constitution of atoms and molecules”, Phil. Mag. **26**, 1-25 (1913)
N. Bohr “Om Brintspektret”, Fysisk Tidsskrift, **12**, (1913)

[2] Som SI systemet er standardiseret optræder der sjældent talfaktorer i fysiske formler, der er en størrelsesorden større eller en størrelsesorden mindre end 1. De mest almindelige talfaktorer skyldes geometri og indeholder π (jævnfør eksempel 1 om pendul og satellit). På grund af ukendskabet til talfaktoren leverer dimensionsanalysen ikke resultatet 1.66 Å. Det er mere rigtigt at sige, at dimensionsanalysen viser, at Bohr radius ligger mellem 10^{-11} og 10^{-9} m, hvilket – når man regner med størrelses ordener – er i pæn overensstemmelse med 10^{-10} m.

Eksempel 5: Hvor lang tid er sandet om at løbe gennem et timeglas på månen?

Det er måske et lidt fjollet spørgsmål at stille, for det bliver næppe et timeglas, man bruger til at måle tiden på månen. Alligevel er det et godt eksempel på, hvordan man ved hjælp af dimensionanalyse ret let kan give et bud på svar, men til gengæld hurtigt ender i noget virkelig indviklet, hvis man skal stille ligninger op for problemet og løse dem.

Hvad afhænger måden sandet løber igennem et timeglas så af? Tyngdefeltsstyrken, g, naturligvis. Og størrelsen af hullet, r, sandet skal løbe igennem.

Men den afhænger også af gnidningskoefficienten mellem sandkorn og glas, μ_g, gnidningskoefficienterne mellem sandkornene indbyrdes, μ_s, størrelsen af sandkorn, sandkornsformerne, fordelingen af sandskornsstørrelser og -former og timeglassets form. Imidlertid kan alle former og fordelinger beskrives dimensionsløst ved vinkler $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ og længdeforhold i forhold til størrelsen af hullet $l_1/r, l_2/r, l_3/r, \ldots$. Da også gnidningskoefficienter er dimensionsløse ender vi op med at antage, at gennemløbstiden, τ, må være givet ved en formel af udseendet

$$\tau = F(\mu_g, \mu_s, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, l_1/r, l_2/r, l_3/r, \ldots)\, r^\alpha g^\beta\,, \qquad (1)$$

idet det kun er størrelserne r og g, der bidrager til at give dimensionen tid. I funktionsudtrykket for F indgår kun dimensionsløse størrelser, og F er således selv dimensionsløs. Dimensionerne af r og g er $[r] = L$ og $[g] = LT^{-2}$.

Vi ønsker at finde en tid ud fra disse størrelser, hvilket leder til følgende ligning for dimensionerne

$$T = L^\alpha (LT^{-2})^\beta. \qquad (2)$$

For at få dimensionerne til at passe skal der for potenserne α og β gælde

$$T: \qquad -2\beta = 1 \qquad (3)$$

$$L: \qquad \alpha + \beta = 0\,. \qquad (4)$$

Ligning (3) giver $\beta = -1/2$, hvilket indsat i ligning (4) giver $\alpha = 1/2$.

Tiden τ, det tager sandet at løbe gennem timeglasset, er derfor givet ved

$$\tau = F r^{1/2} g^{-1/2} = F\sqrt{\frac{r}{g}} \qquad (5)$$

Dimensionsanalysen giver et svar – bortset fra, at vi ikke kender den dimensionsløse funktion F. Funktionen F er den samme på jorden og på månen, men hvis vi derudover antager, at alle argumenterne (dvs. gnidningskoefficienter, vinkler, fordelinger, osv.) også er de samme, vil funktions*værdien* være den samme på jorden og månen og derfor kan svaret alt andet lige end g skrives i termer af den tid, det tager på jorden (som jo netop er en time):

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\text{måne}}}{\tau_{\text{jord}}} &= \frac{F\sqrt{\frac{r}{g_{\text{måne}}}}}{F\sqrt{\frac{r}{g_{\text{jord}}}}} = \sqrt{\frac{g_{\text{jord}}}{g_{\text{måne}}}}, \text{ dvs.} \\ \tau_{\text{måne}} &= \sqrt{\frac{g_{\text{jord}}}{g_{\text{måne}}}}\tau_{\text{jord}} \end{aligned} \tag{6}$$

Ved indsættelse af $g_{\text{måne}} = 1.62 \text{ m/s}^2$ og $g_{\text{jord}} = 9.82 \text{ m/s}^2$ får vi, at det ville tage ca. 2 1/2 time for sandet at løbe igennem timeglasset på månen.

Så vidt dimensionsanalysens svar på spørgsmålet.

På Roskilde Universitet førte spørgsmålet – og dimensionssvaret – til et semesterprojekt. Studentergruppen satte sig for at undersøge problemet, dels med computersimuleringer, dels eksperimentelt. Metoden, de brugte til at variere tyngdefeltsstyrken, er den samme, som man bruger til at træne astronauter: de lavede en centrifuge til timeglasset og overvågede, hvordan sandet løb gennem timeglasset ved forskellige omdrejningshastigheder. Deres undersøgelser viste, at proportionaliteten $t \propto g^{-1/2}$ ikke holdt i deres forsøg. De fandt i stedet, at en anden potens gav en god beskrivelse af deres resultater, nemlig $t \propto g^{-3/4}$. Hvordan kan det nu være? Djævelen ligger i antagelsen *alt andet lige*. Projektet viste, at den antagelse ikke var rigtig, altså at funktionen f ikke har samme værdi ved forskellig g. Da sand ikke er en væske, der bare flyder, men består af større partikler af forskellige former, betyder pakningen (altså hvordan partiklerne ligger i forhold til hinanden) noget. Og pakningen afhænger tilsyneladende af tyngdefeltet. Pakning og flow af granulære materialer (som sand) er et forskningsområde i sig selv, og derfor er spørgsmålet om timeglasset på månen slet ikke så fjollet, som det umiddelbart lyder.

Videre læsning:

Filip Samuelsen, Helena Veldt, Peter Johannsen “The flow rate of granular material in an hourglass under various gravitational acceleration”, NatBach 2. semester rapport, RUC
P. G. Hofmeister, J. Blum, and D. Heisselmann “The Flow Of Granular Matter Under Reduced-Gravity Conditions”, **1145**, 71 (2009)